MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE-4 KUTTA BERDASARKAN RATA-RATA HARMONIK

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

EKA PUTRI ARDIANTI
10754000372

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2011

MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE-4 KUTTA BERDASARKAN RATA-RATA HARMONIK

EKA PUTRI ARDIANTI
10754000372

Tanggal Sidang : 04 Juli 2011
Tanggal Wisuda :   November 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata harmonik. Metode Runge-Kutta orde-4 Kutta adalah salah satu metode iterasi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh bahwa metode modifikasi Runge-Kutta orde-4 Kutta mempunyai galat orde-6 ($O(h^6)$). Hasil dari simulasi numerik untuk beberapa kasus menunjukkan Runge-Kutta orde-4 Kutta lebih baik dibandingkan dengan Runge-Kutta orde-4 Kutta yang telah dimodifikasi.

Kata kunci: *Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta, Rata-rata Harmonik*

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

x_0	: Nilai awal
$f_{(x)}$	: Fungsi dengan variabel bebas *x*
$\sum$	: Sigma
$\bar{x}$	: nilai rata-rata *x*
GP	: galat pemotongan
NH	: Nilai hampiran
NS	: Nilai sejati
T	: Taylor
RKK	: Runge-Kutta Kutta
RKKH	: Runge-Kutta Kutta Harmonik
RKKCH	: Runge-Kutta Kutta Contra Harmonik

DAFTAR TABEL

BAB IV
PEMBAHASAN

Bab IV ini akan membahas pembentukan parameter dari metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata harmonik. Selanjutnya akan di bentuk galat dari metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata harmonik. Setelah didapat bentuk dari Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata harmonik, dilakukan simulasi numerik untuk memperoleh perbandingan galat antara bentuk Runge-Kutta Kutta dengan bentuk Runge-Kutta Kutta yang telah dimodifikasi.

4.1 Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Harmonik

Metode Runge-Kutta telah banyak dimodifikasi, seperti modifikasi metode Runge-Kutta klasik berdasarkan rata-rata aritmatik, rata-rata geometri, kontra harmonik, rata-rata heronian dan rata-rata harmonik.

Perhatikan kembali bentuk umum dari metode Runge-Kutta orde-4 Kutta :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{4.1}$$

Berdasarkan persamaan (4.1) dapat dibentuk persamaan baru yang mengandung unsur rata-rata aritmatik sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1 + k_2}{2}, \frac{k_2 + k_3}{2}, \frac{k_2 + k_3}{2}, \frac{k_3 + k_4}{2}\right) \tag{4.2}$$

Persamaan (4.2) merupakan persamaan Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata aritmatik. Persamaan umum rata-rata harmonik :

$$H = \frac{2k_i k_{i+1}}{k_i + k_{i+1}} \tag{4.3}$$

dengan,

$$i = 1, 2, 3$$

Kemudian subsitusi persamaan (4.3) ke persamaan (4.1) sehingga didapat :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{2h}{4}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4}\right) \tag{4.4}$$

Persamaan (4.4) dapat disederhanakan menjadi :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + 2\frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4}\right) \tag{4.5}$$

dengan $k_1 = f(x_i, y_i)$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

$$k_4 = f(x_i + p_3 h, y_i + q_{31} k_1 h + q_{32} k_2 h + q_{33} k_3 h) \tag{4.6}$$

Persamaan (4.5) dikenal sebagai modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata harmonik.

dengan,

$$p_1 = q_{11}$$

$$p_2 = (q_{21} + q_{22})$$

$$p_3 = (q_{31} + q_{32} + q_{33}).$$

Nilai dari $q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}, q_{33}$ diperoleh dengan terlebih dahulu menentukan nilai dari k_1, k_2, k_3, dan k_4. Jabarkan nilai k_1, k_2, k_3, dan k_4 kedalam bentuk deret Taylor, sehingga akan diperoleh persamaan (2.41) sampai (2.44). Persamaan (2.41) sampai (2.44) akan disubstitusikan ke persamaan (4.5) dan untuk menghindari adanya pembagian dua polinomial maka persamaan (4.5) dapat ditulis sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\text{pembilang}}{\text{penyebut}} \tag{4.7}$$

Selanjutnya dengan membandingkan persamaan (4.7) dengan deret Taylor pada persamaan (2.20), sehingga diperoleh :

$$y_i + \frac{\text{pembilang}}{\text{penyebut}} = y_i + T$$

atau,

$$\text{pembilang} = T \times \text{penyebut} \tag{4.8}$$

dengan,

$$\text{pembilang} = h/2\{(k_1 k_2)(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + 2(k_2 k_3)(k_1 + k_2)$$
$$(k_3 + k_4) + (k_3 k_4)(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)\}$$

$$\text{penyebut} = (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)(k_3 + k_4)$$

Substitusikan nilai k_1, k_2, k_3, dan k_4 yang telah diperoleh pada persamaan (2.41) sampai (2.44) ke dalam persamaan (4.8) dengan memperhatikan h^n dengan $n \leq 4$ dan untuk penyederhanaan aljabar dipilih $A = q_{21} + q_{22}$ dan $q_{31} + q_{32} + q_{33} = B$ sehingga diperoleh :

$$
\begin{aligned}
&h^2 f^4 f_y &&: 3q_{11} + 3A + B - 4 = 0\\
&h^3 f^5 f_{yy} &&: {}^3\!/_2\, q_{11}^2 + {}^3\!/_2\, A^2 + {}^1\!/_2\, B^2 - {}^4\!/_3 = 0\\
&h^3 f^4 f_y^2 &&: {}^3\!/_2\, q_{11}^2 + {}^3\!/_2\, A^2 + {}^7\!/_2\, AB + {}^5\!/_2\, q_{11}B + 8q_{11}A\\
& &&+3q_{22}q_{11} + q_{32}q_{11} + q_{33}A - 4q_{11} - 4A - 2B - {}^4\!/_3 = 0\\
&h^4 f^6 f_{yyy} &&: {}^1\!/_2\, q_{11}^3 + {}^1\!/_2\, A^3 + {}^1\!/_6\, B^3 - {}^1\!/_3 = 0\\
&h^4 f^5 f_y f_{yy} &&: {}^3\!/_2\, q_{11}^3 + {}^3\!/_2\, A^3 + 4q_{11}^2 A + 4q_{11}A^2 + {}^5\!/_4\, q_{11}B^2\\
& &&+ {}^5\!/_4\, q_{11}^2 B + {}^1\!/_2\, q_{11}^2 q_{32} + {}^1\!/_2\, q_{33}A^2 + Bq_{32}q_{11} + ABq_{33}\\
& &&+ {}^7\!/_4\, A^2B + {}^7\!/_4\, AB^2 + {}^3\!/_2\, q_{11}^2 q_{22} + 3q_{11}q_{22}A - 2q_{11}^2\\
& &&-2A^2 - B^2 - {}^4\!/_3\, q_{21} - {}^4\!/_3\, A - {}^2\!/_3\, B - \frac{4}{3} = 0\\
&h^4 f^4 f_y^3 &&: 3q_{11}^2 A + 3q_{11}A^2 + q_{11}^2 B + 8q_{11}^2 q_{22} - q_{11}^2\\
& &&+ {}^5\!/_2\, q_{11}^2 q_{32} + {}^7\!/_2\, q_{11}q_{32}A + {}^5\!/_2\, q_{11}q_{33}A - 2q_{33}A\\
& &&+3q_{22}q_{11}A + 5q_{11}AB + q_{11}q_{22}q_{33} + {}^7\!/_2\, q_{11}q_{22}B\\
& &&+ {}^7\!/_2\, q_{33}A^2 + A^2B - {}^4\!/_3\, A - {}^2\!/_3\, B - {}^4\!/_3\, q_{11} - A^2 - {}^1\!/_3\\
& &&-4q_{11}q_{22} - 2q_{11}q_{32} - 3q_{11}A - AB - 2q_{11}B = 0 \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Ambil nilai $A = 2/3$ dan $B = 1$ sehingga diperoleh :

$$
\begin{aligned}
&h^2 f^4 f_y &&: 3q_{11} = 1\\
&h^3 f^5 f_{yy} &&: {}^3\!/_2\, q_{11}^2 = {}^1\!/_6\\
&h^3 f^4 f_y^2 &&: {}^{23}\!/_6\, q_{11} + {}^3\!/_2\, q_{11}^2 + 3q_{22}q_{11} + q_{32}q_{11} + {}^2\!/_3\, q_{33} = 3\\
&h^4 f^6 f_{yyy} &&: {}^1\!/_2\, q_{11}^3 = {}^1\!/_{54}\\
&h^4 f^5 f_y f_{yy} &&: {}^3\!/_2\, q_{11}^3 + {}^{23}\!/_{12}\, q_{11}^2 + {}^{61}\!/_{36}\, q_{11} + {}^3\!/_2\, q_{11}^2 q_{22}\\
& &&+2q_{11}q_{22} + {}^1\!/_2\, q_{11}^2 q_{32} + q_{11}q_{32} + {}^8\!/_9\, q_{33} = 43/18\\
&h^4 f^4 f_y^3 &&: 2q_{11}^2 - {}^2\!/_3\, q_{11} + 8q_{11}^2 q_{22} + {}^1\!/_3\, q_{11}q_{32} + {}^5\!/_2\, q_{11}^2 q_{32}
\end{aligned}
$$

$$+ {}^{5}/_{3}\, q_{11}q_{33} + {}^{3}/_{2}\, q_{22}q_{11} + {}^{2}/_{9}\, q_{33} + q_{11}q_{22}q_{33} \;\; = {}^{23}/_{9} \qquad (4.10)$$

substitusikan nilai $q_{11} = {}^{1}/_{3}$ ke dalam persamaan (4.10) sehingga diperoleh :

$$q_{22} + {}^{1}/_{3}\, q_{32} + {}^{2}/_{3}\, q_{33} = {}^{14}/_{9}$$

$${}^{5}/_{6}\, q_{22} + {}^{7}/_{18}\, q_{32} + {}^{8}/_{9}\, q_{33} = {}^{14}/_{9}$$

$${}^{25}/_{18}\, q_{22} + {}^{7}/_{18}\, q_{32} + {}^{7}/_{9}\, q_{33} + {}^{1}/_{3}\, q_{22}q_{33} = {}^{23}/_{9} \qquad (4.11)$$

Langkah terakhir adalah melakukan penyelesaian dengan mengeliminasi persamaan (4.11) untuk memperoleh nilai parameter sebagai berikut:

$q_{11} = {}^{1}/_{3}\,, q_{21} = {}^{7}/_{18} - {}^{\sqrt{265}}/_{18}\,, q_{22} = {}^{5}/_{18} + {}^{\sqrt{265}}/_{18}\,, q_{31} = -{}^{13}/_{3} + {}^{\sqrt{265}}/_{3}\,, q_{32} = {}^{41}/_{6} - {}^{\sqrt{265}}/_{2}$ dan $q_{33} = -{}^{3}/_{2} + {}^{\sqrt{265}}/_{6}$.

Substitusikan semua nilai parameter yang telah diperoleh ke dalam persamaan (4.6), sehingga diperoleh metode Runge-Kutta orde-4 kutta berdasarkan rata-rata harmonik yang ditulis :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2} + 2\frac{k_2k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_3k_4}{k_3 + k_4}\right)$$

dengan $k_1 = f(x_i, y_i)$

$$k_2 = f(x_i + h/3, y_i + h/3\, k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + 2h/3\,, y_i + \frac{h}{18}((7-\sqrt{265})k_1 + (5 + \sqrt{265})k_2)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + \frac{h}{6}(\left(-26 + 2\sqrt{265}\right)k_1 + \left(41 - 3\sqrt{265}\right)k_2 + \left(-9 + \sqrt{265}\right)k_3) \qquad (4.12)$$

4.2 Galat Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Harmonik

Galat metode Runge-Kutta orde-4 kutta berdasarkan rata-rata harmonik dapat diperoleh dengan langkah-langkah yang sama dalam menentukan persamaan RKKH. Substitusikan nilai parameter yang telah didapat kedalam persamaan (4.8) dan mengekspansinya sampai dengan Orde-5 (h^5), maka diperoleh galat metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata harmonik sebagai berikut :

$$Galat = \frac{h^5}{1458}\Big(-102f^6 f_y f_{yyy} - 99f^6 f_{yy}^2 + \big(-954 + 36\sqrt{265}\big)f^5 f_y^2 f_{yy} + \big(-2070 + 108\sqrt{265}\big)f^4 f_y^4\Big) + O(h^6) \qquad (4.13)$$

4.3 Simulasi Numerik

Penyelesaian persamaan differensial dengan menggunakan Metode Runge-Kutta orde-4 Kutta, RKKH, dan RKKCH.

Contoh 4.1 Persamaan differensial :

$$y' = \frac{1}{y}, \qquad y(0) = 1, \qquad 0 \le x \le 1.25 \qquad (4.14)$$

dan solusi eksak yang diberikan adalah $y = \sqrt{2x+1}$ dengan n = 10. Tentukan penyelesaian persamaan differensial diatas dengan menggunakan Runge-Kutta orde-4 Kutta, RKKH dan RKKCH.

Penyelesaian:

Persamaan (4.14) diselesaikan dengan menggunakan Matlab5.3 secara metode Runge-Kutta Kutta, Runge-Kutta Kutta berdasarkan rata-rata harmonik (RKKH) dan rata-rata kontra harmonik(RKKCH), dengan $h = 0.125000$, $x_0 = 0$ dan $y_0 = 1$. Solusi eksak dan *error* dari persamaan (4.14) disajikan dalam Tabel (4.1).

Tabel 4.1: Solusi Eksak dan *Error* dari metode Runge-Kutta Kutta, RKKH, dan RKKCH untuk Persamaan $y' = \frac{1}{y}$

i	x	y (solusi eksak)	*Error*		
			Metode RKK	Metode RKKH	Metode RKKCH
1	0,000	1,0000000000	0,000000E+00	0,0000000000	0,0000000000
2	0,125	1,1180339887	3,193602E-07	7,764224E-08	4,715722E-07
3	0,250	1,2247448714	4,148485E-07	1,015575E-07	6,114496E-07
4	0,375	1,3228756555	4,403539E-07	1,082387E-07	6,483103E-07
5	0,500	1,4142135624	4,407862E-07	1,086179E-07	6,484746E-07
6	0,625	1,5000000000	4,317287E-07	1,065609E-07	6,348393E-07
7	0,750	1,5811388301	4,192312E-07	1,035916E-07	6,162534E-07
8	0,875	1,6583123952	4,058093E-07	1,003536E-07	5,963793E-07
9	1,000	1,7320508076	3,925393E-07	9,712682E-08	5,767754E-07
10	1,125	1,8027756377	3,798719E-07	9,403172E-08	5,580886E-07

Contoh 4.2 Persamaan differensial :

$$y' = -y \qquad y(0) = 1 \qquad 0 \le x \le 1 \tag{4.15}$$

dan solusi eksak yang diberikan adalah e^{-x} dengan *n* =10. Tentukan penyelesaian persamaan (4.15) dengan menggunakan Metode Runge-Kutta orde-4 Kutta, Metode RKKH dan RKKCH.

Penyelesaian:

Persamaan (4.15) diselesaikan dengan matlab 5.3 secara metode Runge-Kutta Kutta, Runge-Kutta Kutta berdasarkan rata-rata harmonik (RKKH) dan rata-rata kontra harmonik(RKKCH), dengan $h = 0.1$, $x_0 = 0$ dan$y_0 = 1$. Solusi eksak dan *error* dari persamaan (4.15) disajikan pada Tabel (4.2).

Tabel 4.2 : Solusi Eksak dan *Error* dari metode Runge-Kutta Kutta, RKKH, dan RKKCH untuk Persamaan $y' = -y$

i	x	y (solusi eksak)	*Error*		
			Metode RKK	Metode RKKH	Metode RKKCH
1	0,000	1,0000000000	0,000000E+00	0,0000000000	0,0000000000
2	0,1	0,9048374180	8,196404E-08	3,784986E-07	9,086532E-08
3	0,2	0,8187307531	1,483283E-07	6,849595E-07	1,644367E-07
4	0,3	0,7408182207	2,013195E-07	9,296657E-07	2,231827E-07
5	0,4	0,6703200460	2,428818E-07	1,121595E-06	2,692587E-07
6	0,5	0,6065306597	2,747107E-07	1,268577E-06	3,045442E-07
7	0,6	0,5488116361	2,982823E-07	1,377427E-06	3,306755E-07
8	0,7	0,4965853038	3,148798E-07	1,454073E-06	3,490755E-07
9	0,8	0,4493289641	3,256172E-07	1,503657E-06	3,609789E-07
10	0,9	0,4065696597	3,314595E-07	1,530636E-06	3,674556E-07

Contoh 4.3 Persamaan differensial :

$$y' = y - x^2 + 1 \qquad y(0) = 0.5 \qquad 0 \le x \le 2 \tag{4.16}$$

dan solusi eksak yang diberikan adalah $y = (x+1)^2 - 0.5e^x$ dengan n =15. Tentukan penyelesaian persamaan (4.16) dengan menggunakan Metode Runge-Kutta orde-4 Kutta, Metode RKKH dan RKKCH.

Penyelesaian:

Persamaan (4.16) diselesaikan dengan matlab5.3 secara metode Runge-Kutta Kutta, Runge-Kutta Kutta berdasarkan rata-rata harmonik (RKKH) dan rata-rata kontra harmonik(RKKCH), dengan $h = 0.133333$, $x_0 = 0$ dan $y_0 = 0.5$. Solusi eksak dan *error* dari persamaan (4.16) disajikan dalam Tabel (4.3).

Tabel 4.3 : Solusi Eksak dan *Error* dari metode Runge-Kutta Kutta, RKKH, dan RKKCH untuk Persamaan $y' = y - x^2 + 1$

i	x	y (solusi eksak)	*Error*		
			Metode RKK	Metode RKKH	Metode RKKCH
1	0,000	0,5000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,000000E+00
2	0,13	0,7131290385	4,057162E-07	1,029084E-05	1,238558E-05
3	0,27	0,9516418584	8,436890E-07	3,502354E-05	3,880567E-05
4	0,40	1,2140876512	1,314866E-06	7,230495E-05	7,748345E-05
5	0,53	1,4988086784	1,819810E-06	1,208166E-04	1,271927E-04
6	0,67	1,8039107573	2,358568E-06	1,795065E-04	1,869635E-04
7	0,80	2,1272295358	2,930512E-06	2,473684E-04	2,558719E-04
8	0,93	2,4662919589	3,534150E-06	3,232483E-04	3,328556E-04
9	1,07	2,8182722377	4,166887E-06	4,056425E-04	4,165210E-04
10	1,20	3,1799415386	4,824744E-06	4,924507E-04	5,049085E-04
11	1,33	3,5476104971	5,502015E-06	5,806462E-04	5,951779E-04
12	1,47	3,9170635314	6,190853E-06	6,658034E-04	6,831587E-04
13	1,60	4,2834837878	6,880783E-06	7,413851E-04	7,626707E-04
14	1,73	4,6413673811	7,558099E-06	7,976113E-04	8,244485E-04
15	1,87	4,9844254024	8,205172E-06	8,195578E-04	8,543333E-04

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta memiliki bentuk umum sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

setelah dilakukan modifikasi dengan menggunakan rata-rata harmonik diperoleh :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2} + 2\frac{k_2k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_3k_4}{k_3 + k_4}\right)$$

dengan $k_1 = f(x_i, y_i)$

$$k_2 = f(x_i + h/3, y_i + h/3\, k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + 2h/3\,, y_i + \frac{h}{18}((7-\sqrt{265})k_1 + (5 + \sqrt{265})k_2)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + \frac{h}{6}(\left(-26 + 2\sqrt{265}\right)k_1 + \left(41 - 3\sqrt{265}\right)k_2 + \left(-9 + \sqrt{265}\right)k_3)$$

Galat dari metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata harmonik diperoleh

$$\text{Galat} = \frac{h^5}{1458}\left(-102f^6f_yf_{yyy} - 99f^6f_{yy}^2 + \left(-954 + 36\sqrt{265}\right)f^5f_y^2f_{yy} + \left(-2070 + 108\sqrt{265}\right)f^4f_y^4\right) + O(h^6)$$

Penyelesaian persamaan diferensial biasa orde satu dengan menggunakan Metode Runge-Kutta Kutta, Runge-Kutta Kutta harmonik, dan Runge-Kutta Kutta kontra harmonik dalam beberapa persoalan persamaan diferensial orde satu diperoleh, bahwa metode Runge-Kutta Kutta memiliki *error* yang lebih kecil dibandingkan dengan metode Runge-Kutta Kutta yang telah dimodifikasi.

5.2 Saran

Penulisan tugas akhir ini penulis hanya menggunakan rata-rata harmonik untuk memodifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta, dan dalam komputasinya hanya membandingkan tiga metode. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar pembaca dapat lebih lanjut menemukan bentuk baru dengan menggunakan rata-rata yang berbeda seperti (heronian, geometri, dll).

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam beberapa ilmu pengetahuan seperti dalam bidang Fisika, Kimia, Ekonomi, atau pada persoalan rekayasa yang diberikan dalam bentuk persamaan differensial orde satu atau orde dua. (Munir. 2008)

Dalam matematika persoalan persamaan differensial biasa orde satu dapat dituliskan

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

dengan nilai awal

$$y(x_0) = y_0$$

Penyelesaian persamaan differensial pada persamaan (1.1) dapat diselesaikan secara analitik dan penyelesaiannya dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi secara eksplisit. Namun, tidak semua persoalan pada persamaan (1.1) dapat diselesaikan secara analitik sehingga diperlukan metode numerik untuk menyelesaikan persoalan tersebut.

Ada banyak metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan dalam bentuk persamaan (1.1). Salah satu metode yang dapat digunakan yaitu metode Runge-Kutta. Bentuk umum metode Runge-Kutta orde n sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n \tag{1.2}$$

dengan a adalah konstanta dan setiap k besarnya:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1)$$
$$k_3 = hf(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$$
$$\vdots$$
$$k_n = hf\left(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1 + q_{n-1,2}k_2 + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}\right)$$

Metode Runge-Kutta memiliki banyak bentuk berdasarkan pengambilan parameter bebasnya diantaranya, Runge-Kutta orde-4 klasik dan Runge-Kutta orde-4 Kutta. Metode Runge-Kutta telah banyak mengalami modifikasi dengan tujuan untuk memperkecil *error* dari metode tersebut sehingga hampirannya lebih mendekati nilai eksaknya. Penelitian terhadap modifikasi metode Runge-Kutta orde empat klasik telah dilakukan oleh para peneliti diantaranya :

Metode Runge-Kutta orde-4 klasik yang dimodifikasi berdasarkan rata-rata aritmatik seperti berikut :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}\left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2}\right) \tag{1.3}$$

Modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 klasik berdasarkan rata-rata geometri yang telah dilakukan oleh Evans (1991), diperoleh :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}\left(\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_2 k_3} + \sqrt{k_3 k_4}\right) \tag{1.4}$$

dengan $k_1 = f(x_n, y_n)$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{16}(-k_1 + 9k_2))$$

$$k_4 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{24}(-3k_1 + 5k_2 + 22k_3))$$

Modifikasi Runge-Kutta orde-4 klasik berdasarkan rata-rata harmonik telah dilakukan oleh Sanugi B.B dan D.J.Evans (1993) :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2h}{3}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4}\right) \tag{1.5}$$

dengan $k_1 = f(x_n, y_n)$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{8}(-k_1 + 5k_2))$$

$$k_4 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{20}(-5k_1 + 7k_2 + 18k_3))$$

Selanjutnya untuk metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata kontra harmonik telah dilakukan oleh Supinah (2010) :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + 2\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2 + k_3} + \frac{k_3^2 + k_4^2}{k_3 + k_4}\right) \qquad (1.6)$$

dengan

$$k_1 = f(y_i)$$

$$k_2 = f\left(y_i + h\frac{k_1}{3}\right)$$

$$k_3 = f(y_i + \frac{h}{18}(k_1(5 - \sqrt{73}) + k_2(7 + \sqrt{73})))$$

$$k_4 = f(y_i + \frac{h}{6}(k_1(-10 + 2\sqrt{73}) + k_2(19 - 3\sqrt{73}) + k_3(-3 + \sqrt{73})))$$

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti mengenai modifikasi Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata kontra harmonik, maka penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian mengenai metode Runge-Kutta dengan ”Modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata harmonik”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan bentuk modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata harmonik.

1.3 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini penulis hanya membatasi pembahasan pada bentuk Runge-Kutta orde-4 Kutta, persamaan differensial biasa orde satu, dan Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata harmonik.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan bentuk baru dari modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata harmonik.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini disusun atas lima bab.

BAB I Pendahuluan

Pada bab ini berisikan latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, dan tujuan dari penelitian.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan tentang teori-teori yang menunjang untuk menyelesaikan permasalahan dalam tugas akhir diantaranya persamaan diferensial biasa, metode Taylor, metode Runge-Kutta orde-4 dan rata-rata harmonik.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan metodologi yang digunakan penulis dalam tugas akhir untuk memperoleh hasilnya.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisi tentang bagaimana langkah-langkah dan hasil dari bentuk modifikasi Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata harmonik.

BAB V Penutup

Pada bab ini berisikan kesimpulan dari tugas akhir dan saran.

BAB II
LANDASAN TEORI

Bab II ini membahas teori-teori yang akan digunakan dalam penelitian tugas akhir ini yaitu, sebagai berikut :

2.1 Metode Deret Taylor

Teorema Taylor memberikan barisan pendekatan sebuah fungsi yang diferensiabel pada sebuah titik yang menggunakan suku banyak (polinomial).

Teorema 2.1 (Leithold Louis, 1993) Andaikan *f* adalah suatu fungsi sehingga *f* dan turunan-turunan ke *n*-nya kontinu pada selang [a,b]. Selanjutnya, misalkan $f^{(n+1)}(x)$ ada untuk setiap *x* pada (a,b). Maka terdapat suatu bilangan ξ pada selang terbuka (a,b) sehingga :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}\ f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

Bukti :

Jika *n* = 0, maka Teorema 2.1 menjadi :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(\xi)$$

Dengan ξ diantara *a* dan *b* merupakan teorema dari nilai rata-rata. Misalkan *F* dan *H* merupakan fungsi yang didefinisikan oleh :

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}\ f''(x) - \cdots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) \qquad (2.1)$$

dan

$$H(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (2.2)$$

Selanjutnya, turunkan persamaan (2.1) dan persamaan (2.2), dengan menyederhanakan persamaan (2.1), maka diperoleh :

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \qquad (2.3)$$

dan

$$H'(x) = -\frac{1}{n!}(b-x)^n \qquad (2.4)$$

Oleh karena, fungsi F dan H kontinu pada [a,b], dan diferensiabel pada (a,b) dan $H'(x) \neq 0$ untuk setiap x pada (a,b), sehingga fungsi F dan H memenuhi syarat teorema nilai rata-rata Cauchy (TNR Cauchy). Akibatnya $\xi \epsilon$ (a,b) sehingga

$$\frac{F'(\xi)}{H'(\xi)} = \frac{F(b) - F(a)}{H(b) - H(a)}$$

karena $F(b) = F(a) = 0$ sehingga :

$$\frac{F'(\xi)}{H'(\xi)} = \frac{F(a)}{H(a)}$$

atau dapat ditulis :

$$F(a) = \frac{F'(\xi)}{H'(\xi)} H(a) \qquad (2.5)$$

Untuk suatu $\xi \epsilon$ (a,b), misalkan $x = a$ pada persamaan (2.2) dan $x = \xi$ pada persamaan (2.3) dan (2.4) sehingga dengan mensubtitusikan persamaan (2.2), (2.3), dan (2.4) untuk titik $\xi \epsilon (a, b)$ ke dalam persamaan (2.5) diperoleh :

$$F(a) = \frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n}{\frac{1}{n!}(b-\xi)^n} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$F(a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad (2.6)$$

jika $x = a$, persamaan (2.1) menjadi :

$$F(a) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!}\ f''(a) - \cdots$$
$$- \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)} - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)} \qquad (2.7)$$

Subsitusikan persamaan (2.6) ke dalam persamaan (2.7), sehingga diperoleh :

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!}\ f''(a) - \cdots$$
$$-\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)} - \ \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}$$

dan menghasilkan bentuk :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}\ f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$
$$+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{2.8}$$

sehingga teorema 2.1 terbukti.

Berdasarkan persamaan (2.8), jika b diganti x dan $a = x_0$, maka akan diperoleh deret Taylor $f(x)$ yang diekspansi disekitar x_0, berikut :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\ f''(x_0) + \cdots$$
$$+\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{2.9}$$

dengan ξ diantara x_0 dan *x*. Jika *f* dan *n* turunan pertamanya kontinu pada suatu selang tertutup yang memuat x_0 dan *x*, dan turunan ke (*n*+1) dari *f* ada disetiap titik pada selang terbuka yang berkaitan. Maka persamaan (2.9) dapat ditulis :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{2.10}$$

dengan

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\ f''(x_0) + \cdots$$
$$+\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \tag{2.11}$$

dan

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{2.12}$$

dengan ξ diantara x_0 dan *x*.

Persamaan (2.11) disebut polinomial Taylor orde-*n* untuk *f* disekitar x_0 dan $R_n(x)$ disebut suku sisa atau galat pemotongan.

Persamaan (2.9) disebut sebagai persamaan Taylor satu variabel, jika persamaan Taylor untuk dua variabel (*x*,*y*), dapat ditulis :

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \left[(x-x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right] \\
&+ \left[\frac{(x-x_0)^2}{2}\,\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} + (x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right. \\
&+ \left.\frac{(y-y_0)}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\right] + \cdots \\
&+ \left[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(x-x_0)^{n-j}(y-y_0)^{j}\,\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-j}\partial x^{j}}\right] \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

Penyelesaian persamaan differensial biasa dengan menggunakan deret Taylor sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \ \ , \ \ y' = f$$

Bentuk turunan persamaan differensial dalam bentuk f untuk orde-orde yang lebih tinggi dapat ditulis sebagai berikut :

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

dengan ,

$$f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f = f_x + ff_y$$

$$
\begin{aligned}
f''(x,y) &= \left(\frac{\partial\left(f_x + ff_y\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(f_x + ff_y\right)}{\partial y}f\right) \\
&= f_{xx} + f_x f_y + f_{yx} f + f_{xy} f + f\left(f_y f_y + f f_{yy}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{(3)}(x,y) = {} & f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 3ff_y f_{yy} \\
&+4f^2 f_x f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_y^2\left(f_x + ff_y\right)
\end{aligned}
$$

Bentuk dari turunan f di atas dapat ditulis sebagai berikut :

$$y' = f \qquad (2.14)$$

$$y'' = f' = f_x + f_y f \qquad (2.15)$$

$$
\begin{aligned}
y^{(3)} &= f'' = f_{xx} + f_{xy} f + f_{yx} f + f_{yy} f^2 + f_y f_x + f_y^2 f \\
&= f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y^{(4)} = f''' = {} & f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 3ff_y f_{yy} \\
&+4f^2 f_x f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_y^2\left(f_x + ff_y\right) \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Deret Taylor hampiran y_{i+1} yang diekspansi disekitar y_i dapat ditulis sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + hy_i^{'} + \frac{h^2}{2!} y_i^{''} + \frac{h^3}{3!} y_i^{(3)} + \cdots + \frac{h^n}{n!} y_i^{(n)} \qquad (2.18)$$

sehingga persamaan (2.18) jika disubstitusikan ke dalam persamaan (2.14) sampai (2.15) untuk deret Taylornya dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2}\left(f_x + ff_y\right) \\ + \frac{h^3}{6}\left(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + ff_y^2\right) \\ + \frac{h^4}{24}((f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_3 f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 4f^2 f_y f_{yy}) \\ + f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_y^2\left(f_x + ff_y\right)) + O(h^5) \end{aligned} \qquad (2.19)$$

dengan hanya mengambil turunan terhadap y pada persamaan (2.16) sampai (2.18), dan memasukkannya terhadap persamaan Taylor (2.18), maka akan diperoleh :

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + hf + \tfrac{h^2}{2} ff_y + \tfrac{h^3}{6}\left(ff_y{}^2 + f^2 f_y\right) + \tfrac{h^4}{24}\left(f^3 f_{yyy} + \right. \\ \left. 4f^2 f_y f_{yy} + ff_y^3\right) \end{aligned} \qquad (2.20)$$

2.2 Persamaan Differensial Biasa

2.2.1 Pengertian Umum

Penulis memasukkan persamaan differensial biasa pada landasan teori, dikarenakan hasil dari modifikasi metode Runge-Kutta orde empat kutta digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa. Persamaan differensial biasa adalah suatu persamaan yang meliputi turunan fungsi yang hanya tergantung pada satu variabel bebas.

Persamaan differensial biasa orde-n adalah suatu persamaan yang mempunyai bentuk umum :

$$f(x) = F\left(x, y, y^{'}, y^{''}, y^3, \cdots, y^{(n)}\right) \qquad (2.21)$$

dengan tanda aksen menunjukkan turunan terhadap x, yaitu $y^{'} = \frac{dy}{dx}, y^{''} = \frac{d^2y}{d^2x}$, dan seterusnya.

Suatu persamaan differensial biasa orde-n dikatakan linier dinyatakan dalam bentuk :

$$\alpha_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = F(x), \qquad (2.22)$$

dengan $a_0(x) \neq 0$.

Jika suatu persamaan tidak dapat dinyatakan dengan bentuk persamaan (2.22) maka, persamaan dikatakan tak linier. Jika koefisien dari persamaan (2.22) yaitu $\alpha_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x)$ konstanta, maka dikatakan memiliki koefisien konstanta. Jika $\alpha_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x)$ tidak konstanta, maka dikatakan memiliki koefisien variabel. Jika $F(x) = 0$ maka persamaan differensial biasa tersebut dikatakan homogen, jika $F(x) \neq 0$ maka disebut nonhomogen.

Orde dari suatu persamaan differensial adalah tingkat dari turunan yang ada dalam persamaan (2.21), jika y' maka persamaan tersebut dikatakan sebagai persamaan differensial orde satu, dan jika y'' maka disebut sebagai persamaan diferensial orde dua. Begitu seterusnya sampai dengan orde-*n*. Penulisan Tugas akhir ini, penulis hanya membahas persamaan differensial biasa, khususnya persamaan differensial orde satu.

Penyelesaian persoalan persamaan diferensial khusus memerlukan nilai awal, karena nilai awal digunakan untuk mendapatkan solusi dari persamaan differensial tersebut. Adapun bentuk dari persamaan diferensial biasa orde satu dengan nilai awal ditulis sebagai :

$$y' = f(x, y) \qquad (2.23)$$

dengan nilai dari fungsi $y(x)$ diketahui pada $x = 0$, misalnya $y(x_0) = y_0$.

2.2.2 Bentuk Persamaan Differensial Orde Satu

Persamaan differensial orde satu dapat diselesaikan dengan berbagai cara diantaranya :

a. Persamaan Differensial Variabel Terpisah

Persamaan differensial yang suku-sukunya dapat dikelompokkan berdasarkan peubahnya sehingga mudah dicari penyelesaiannya. Suatu persamaan differensial yang berbentuk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{2.24}$$

ubah persamaan (2.24) ke dalam bentuk terpisah sehingga :

$$g(y)dy = f(x)dx \tag{2.25}$$

Integralkan setiap ruas persamaan sehingga menjadi :

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx \tag{2.26}$$

oleh karena *x* adalah peubah bebas terhadap *y*, dan anti turunan dari $g(y)$ dan $f(x)$ maka hasil integrasi dari persamaan (2.26) dapat ditulis :

$$G(y) = F(x) + C$$

Contoh 2.1 Selesaikan masalah nilai awal berikut :

$$dy + 5x^4y^2dx = 0, \quad y(0) = 1 \tag{2.27}$$

Penyelesaian:

Persamaan (2.27) dapat dibentuk menjadi :

$$dy = -5x^4y^2dx$$

$$\frac{dy}{y^2} = -5x^4dx$$

Integralkan kedua ruas : $\int {}^{dy}\!/_{y^2} = \int -5x^4dx$

$$-\frac{1}{y} = -x^5 + c$$

$$y = \frac{1}{x^5 - c}$$

oleh karena, $y(0) = 1$ maka :

$$y(0) = \frac{1}{0 - c} = 1$$

$$\frac{1}{-c} = 1 \quad , \quad c = -1$$

sehingga penyelesaian khususnya adalah :

$$y = \frac{1}{x^5 + 1}$$

b. Persamaan Differensial Eksak

Bentuk dari persamaan differensial :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.28}$$

adalah eksak jika ada suatu fungsi $p(x, y)$:

$$dp(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy, \tag{2.29}$$

Selanjutnya untuk menyelesaikan persamaan (2.29) maka harus ditentukan terlebih dahulu apakah persamaan tersebut eksak. Suatu persamaan dikatakan eksak jika dan hanya jika memenuhi :

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \text{ untuk setiap } (x,y) \in R \tag{2.30}$$

kemudian, jika persamaan (2.28) telah eksak maka pertama-tama selesaikan persamaan :

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \tag{2.32}$$

Solusi secara khusus dari persamaan (2.28) diberikan sebagai berikut :

$$p(x, y) = c \tag{2.33}$$

Contoh 2.2 Selesaikan persamaan differensial berikut :

$$(2xy)dx + (1 + x^2)dy = 0 \tag{2.34}$$

Penyelesaian:

Berdasarkan persamaan (2.34) diperoleh $M(x, y) = 2xy$ dan $N(x, y) = (1 + x^2)$.

Tentukan terlebih dahulu apakah persamaan tersebut eksak :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(1 + x^2)}{\partial x} = 2x$$

Oleh karena $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$ maka persamaan di atas adalah eksak, selanjutnya integralkan $M(x, y)$ terhadap x, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int M(x, y)\ dx + h(y) \\ &= \int (2xy)dx + h(y) \\ &= x^2y + h(y) \end{aligned}$$

Kemudian turunkan persamaan $F(x, y)$ terhadap ∂y diperoleh $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + h'(y)$

dan substitusikan $N(x,y)$ terhadap $\frac{\partial F}{\partial y}$. Kemudian selesaikan bentuk $h'(y)$ dengan mengintegralkannya yang akan memperoleh nilai dari $h(y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

$$x^2 + h'(y) = 1 + x^2$$

$$h'(y) = 1$$

$$h(y) = y + c_1$$

sehingga diperoleh penyelesaian umumnya $F(x,y) = x^2y + y + c_1$.

Solusi secara khususnya, berdasarkan persamaan (2.33) maka bentuk penyelesaian umumnya menjadi $c = x^2y + y + c_1$ dengan $c_2 = c - c_1$, sehingga penyelesaian khususnya adalah :

$$y = \frac{c_2}{x^2 + 1}$$

c. Persamaan Differensial Linier

Persamaan differensial orde satu linier dapat ditulis :

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{2.35}$$

yang memiliki faktor integrasi :

$$I(x) = e^{\int p(x)dx} \tag{2.36}$$

Jika persamaan (2.36) di kalikan terhadap persamaan (2.35) maka diperoleh

$$I(x)y' + I(x)p(x)y = I(x)g(x) \tag{2.37}$$

Contoh 2.3 Tentukan penyelesaian dari persamaan differensial berikut :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^4e^x$$

Penyelesaian :

Fungsi $p(x) = {}^3\!/_x$ maka faktor integrasinya :

$$I(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$= e^{3\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-3\ln|x|} = e^{\ln x^{-3}} = x^{-3}$$

Kemudian kalikan faktor integrasinya kepersamaan :

$$x^{-3}\frac{dy}{dx} - 3x^{-4}y = xe^x$$

dan diperoleh :

$$\frac{d}{dx}(x^{-3}y) = xe^{x}$$

dengan menggunakan integral parsial, maka diperoleh :

$$\int \frac{d}{dx}(x^{-3}y)dx = \int x\,e^{x}dx$$

$$x^{-3}y = xe^{x} - e^{x} + c$$

$$y = x^{4}e^{x} - x^{3}e^{x} + cx^{3}$$

2.3 Metode Runge-Kutta

2.3.1 Bentuk Umum Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan metode pengembangan dari deret Taylor yang tidak memerlukan perhitungan turunan yang lebih tinggi dan dilakukan langkah demi langkah.

Metode Runge-Kutta mempunyai tiga sifat utama yaitu :

1. Metodenya satu langkah, yang berarti bahwa untuk mencapai titik y_{i+1} hanya diperlukan keterangan yang tersedia pada titik sebelumnya yaitu titik x_i, y_i.
2. Mendekati ketelitian deret Taylor sampai suku dalam h^p, dimana nilai p berbeda untuk metode yang berbeda, dan p ini disebut derajat dari metode.
3. Tidak memerlukan perhitungan turunan $f(x,y)$, tetapi hanya memerlukan fungsi itu sendiri.

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde n adalah :

$$y_{i+1} = y_i + a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n \tag{2.38}$$

dengan $k_1 = hf(x_i, y_i)$

$$k_2 = hf(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$$

...

$$k_n = hf(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1 + q_{n-1,2}k_1 + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1})$$

Metode Runge-Kutta dengan n langkah dapat ditunjukkan ke dalam sebuah tabel yang dikenal sebagai Tabel Butcher.

Tabel 2.1 Runge-Kutta Orde *n* dalam Tabel Butcher

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
p_1 & q_{11} & 0 & \cdots & 0 & \\
p_2 & q_{21} & q_{22} & \cdots & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
p_{n-1} & q_{n-1,1} & \cdots & q_{n-1,n-1} & 0 & \\
\hline
1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n &
\end{array}
$$

Tabel Butcher menunjukkan bahwa hasil aproksimasi sama dengan bentuk berikut ini :

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{i=1}^{n} a_i F_i$$

dengan $F_i = f(x_i + hp_{i-1}, y_i + h\sum_{j=1}^{n} q_{i-1,j-1}F_{j-1})$.

2.3.2 Galat Pemotongan

Pada aproksimasi polinomial di titik $n + 1$ data, terdapat perbedaan atau galat terhadap nilai sesungguhnya atau nilai eksak. Nilai perbedaan tersebut dapat dicari dengan menggunakan galat pemotongan. Dengan menstubtitusikan sebuah derajat polinomial $p + 1$ kedalam rumus orde p dapat dibangun sebuah bentuk *error* :

$$T(x,h) = Ch^{p+1}y^{(p+1)}(\varepsilon)$$

Aplikasi Algoritma dan proses perhitungan dari bentuk x_0 ke $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ dalam pengertian yang luas dapat didefinisikan sebagai metode satu langkah, yang secara umum di tulis sebagai :

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h) \qquad\qquad n = 0,1,2, \ldots$$

dengan Φ adalah fungsi naik yang terdapat unsur x_n, y_n dan menggunakan *h*. Definisikan *y*(*x*) sebagai solusi eksak untuk persamaan differensial biasa, sehingga untuk setiap *x* akan berlaku :

$$T(x,h) = y(x) + h\Phi(x, y(x); h) - y(x+h)$$

atau,

$$GP = NS - NH \tag{2.39}$$

2.3.3 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Persamaan umum Runge-Kutta orde empat, yaitu :

$$y_{i+1} = y_i + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4) \tag{2.40}$$

dengan $k_1 = f(x_i, y_i)$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$$

$$k_4 = f(x_i + p_3h, q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3)$$

Persamaan Runge-Kutta di atas memiliki tigabelas konstanta. Untuk memperoleh nilai $a_1, a_2, a_3, a_4, p_1, p_2, p_3, q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}, q_{33}$, adalah dengan cara menjabarkan k_1, k_2, k_3, dan k_4 dalam bentuk deret Taylor. Dengan menjabarkan k_i yang hanya variabel *y* sehingga diperoleh:

$$k_1 = f \tag{2.41}$$

$$k_2 = f(y_i + q_{11}k_1)$$

$$= f + hq_{11}ff_y + {h^2}/{2}\, q_{11}^2 f^2 f_{yy} + {h^3}/{6}\, q_{11}^3 f^3 f_{yyy} + \cdots \tag{2.42}$$

$$k_3 = f(y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$$

$$= f + h(q_{21} + q_{22})ff_y + h^2\left(q_{11}q_{22}ff_y^2 + \frac{1}{2}(q_{21} + q_{22})^2 f^2 f_{yy}\right)$$

$$+h^3({1}/{2}\, q_{11}^2 q_{22} f^2 f_y f_{yy} + q_{21}(q_{21} + q_{22})q_{22} f^2 f_y f_{yy} + {1}/{6}\, (q_{21} +$$

$$q_{22})^3 f^3 f_{yyy}) + \cdots \tag{2.43}$$

$$k_4 = f + h(q_{31} + q_{32} + q_{33})ff_y + h^2\Big(q_{11}q_{32}ff_y^2 + (q_{21} +$$

$$q_{22})q_{33}ff_y^2 + \tfrac{1}{2}(q_{31} + q_{32} + q_{33})^2 f^2 f_{yy}\Big) \quad +h^3({1}/{2}\, q_{11}^2 q_{32}(q_{31} +$$

$$q_{32} + q_{33}) f^2 f_y f_{yy} + q_{33}\, {(q_{21} + q_{22})^2}/{2}\, f^2 f_y f_{yy} + (q_{31} + q_{32} +$$

$$q_{33})\big(q_{11}q_{32} + q_{33}(q_{21} + q_{22})\big) f^2 f_y f_{yy} + q_{33}q_{22}q_{11}ff_y^3 +$$

$${1}/{6}\, (q_{31} + q_{32} + q_{33})^3 f^3 f_{yyy}) \ldots \tag{2.44}$$

Untuk mendapatkan nilai parameter $a_1, a_2, a_3, a_4, q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}, q_{33}$, adalah dengan cara menstubtitusikan persamaan (2.41), (2.42), (2.43), dan (2.44) ke dalam persamaan (2.40). Kemudian gunakan penyelesaian pedekatan deret Taylor untuk mendapatkan parameter tersebut sehingga diperoleh:

$$q_{11} = p_1$$
$$q_{21} + q_{22} = p_2$$
$$q_{31} + q_{32} + q_{33} = p_3$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$$
$$a_2 q_{11} + a_3(q_{21} + q_{22}) + a_4(q_{31} + q_{32} + q_{33}) = \frac{1}{2}$$
$$a_2 q_{11}^2 + a_3(q_{21} + q_{22})^2 + a_4(q_{31} + q_{32} + q_{33})^2 = \frac{1}{3}$$
$$a_2 q_{11}^3 + a_3(q_{21} + q_{22})^3 + a_4(q_{31} + q_{32} + q_{33})^3 = \frac{1}{4}$$
$$a_3 q_{22} q_{11} + a_4 q_{32} q_{11} + a_4 q_{33}(q_{21} + q_{22}) = \frac{1}{6}$$
$$a_3 q_{22} q_{11}^2 + a_4 q_{32} q_{11}^2 + a_4 q_{33}(q_{21} + q_{22})^2 = \frac{1}{12}$$
$$a_3 q_{11} q_{22}(q_{21} + q_{22}) + a_4(q_{31} + q_{32} + q_{33})(q_{11} q_{32} + q_{33}(q_{21} + q_{22})) = \frac{1}{8}$$
$$a_4 q_{33} q_{22} q_{11} = \frac{1}{24} \tag{2.45}$$

Persamaan (2.40) terdiri dari 11 persamaan dengan 13 parameter jika diambil 3 parameter bebas misalnya :

$$p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{2}{3}, p_3 = 1 \tag{2.46}$$

Kemudian substitusikan 3 parameter pada persamaan (2.46) ke persamaan (2.45) sehingga diperoleh :

$$q_{11} = \frac{1}{3}, q_{21} = -\frac{1}{3}, q_{31} = 1, q_{22} = 1, q_{32} = -1, q_{33} = 1$$
$$a_1 = \frac{1}{8}, a_2 = \frac{3}{8}, a_3 = \frac{3}{8}, a_4 = \frac{1}{8} \tag{2.47}$$

Kemudian substitusikan persamaan (2.46) dan (2.47) pada persamaan (2.40) sehingga akan diperoleh rumus Runge-Kutta orde-4 Kutta.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{2.48}$$

dengan $k_1 = hf(x_i, y_i)$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{3}h, y_i + \frac{k_1}{3})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{2}{3}h, y_i - \frac{k_1}{3} + k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_1 - k_2 + k_3)$$

Persamaan (2.40) jika diambil 3 parameter bebasnya :

$$q_{11} = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}, p_3 = 1$$

maka, akan terbentuk Runge-Kutta klasik sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (2.49)$$

dengan $k_1 = hf(x_i, y_i)$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

Runge-Kutta orde-4 kutta dalam bentuk Tabel Butcher dapat dituliskan berdasarakan bentuk umum dari Tabel Butcher pada Tabel 2.1 :

Tabel 2.2 Nilai Parameter dari RKK dalam Tabel Butcher

0	0	0	0	0
1/3	1/3	0	0	0
2/3	−1/3	1	0	0
1	1	−1	1	0
	1/8	3/8	3/8	1/8

Tabel 2.3 Nilai Parameter dari RK Klasik dalam Tabel Butcher

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

2.4 Rata-rata Harmonik

Rata-rata harmonik merupakan salah satu diantara rata-rata yang ada. Rumus umum rata-rata harmonik :

$$\bar{x} = n\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{-1}$$

maka,

$$\bar{x} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

$$\bar{x} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \qquad (2.50)$$

Rata-rata harmonik untuk dua variabel yang setara x_1 dan x_2 dapat ditulis :

$$H = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \qquad (2.51)$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Tugas akhir ini menggunakan metode *research library* (penelitian kepustakaan) yang berguna untuk mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dalam penelitian yang berasal dari literatur yang ada hubungannya dengan penulisan yang akan diuraikan.

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Memperkenalkan bentuk metode Runge Kutta orde-4 Kutta (RKK), yaitu pada persamaan (2.48) :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

2. Kemudian substitusikan persamaan (2.51) $H = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$ kedalam persamaan (2.48) $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$ sehingga menghasilkan bentuk persamaan baru yang disebut sebagai Runge-Kutta Kutta harmonik (RKKH).

3. Setelah didapat bentuk dari RKKH, kemudian menentukan nilai parameter dari RKKH dengan menggunakan Maple 13. Selanjutnya menggunakan bentuk RKKH tersebut ke dalam contoh soal dengan menggunakan Matlab 6,5 untuk memperoleh nilai galatnya.

DAFTAR PUSTAKA

Ababneh, Osama Yusuf dkk. ”On Cases of Fourth-Order Runge-Kutta Methods”. *European Journal of Scientifiec Research*. Vol 31.pp 605-615.2009.

Bronson, Richard dan Costa Gariel. *Persamaan Differensial* . edisi tiga. Erlangga, Jakarta. 2007.

Chapra, Steven C dan Raymond P. Canela. *Metode Numerik untuk Teknik*. Universitas Indonesia. Jakarta. 1991.

Djojodihardjo, Harijono. *Metode Numerik*. halaman 263-276. PT Gramedia Pustaka Utama. Jakarta. 2000.

Evans, D.J. ”A New 4TH Order Runge-Kutta Method for Initial Value Problems With Error Control”. *Intern J. Computer Math*.Vol. 39. halaman 217-227. 1991.

Leithold, Louis. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik. e*disi kelima. Erlangga. Jakarta. 1993.

Martono, K. *Kalkulus*. Erlangga. Jakarta. 1999.

Mathews, John H. *Numerical Method for Mathematics, Science, and Engineering*. California State University. Prentice-hall International. 1992.

Munir, Rinaldi. *Metode Numerik*. edisi revisi. Informatika, Bandung. 2008.

Sanugi, B. B. dan D. J. Evans. ”A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Harmonic Mean”. *Intern J. Computer Math*.Vol. 50. halaman 113-118. 1994.

Supinah.”Modifikasi Metode Runge-Kutta orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Kontraharmonik”. *Tugas akhir mahasiswa Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasif Riau*. 2010.

Yacob, Nazeeruddin dan Bahrom Sanugi. “A New Fourth-Order Embedded Method Based on The Harmonic Mean”. *Universitas Teknologi Malaysia*. Jilid 14. 1998.